



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2007

Niveau 1



PARTIE A (15points);

1.- La valeur de x pour laquelle $2\tanh x - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} \text{On a: } 2\tanh x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 2e^{-x} = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 3e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

	Bonne réponse	B) $x = \frac{1}{2} \ln 3$.	
--	---------------	---	--

2.- La dérivée f' de $f(x) = \cos(\sqrt{2 + \sin x})$ est:

$$f'(x) = \frac{0 + \cos x}{2\sqrt{2 + \sin x}} \left[-\sin(\sqrt{2 + \sin x}) \right] f'(x) = -\frac{\cos x \cdot \sin(\sqrt{2 + \sin x})}{2\sqrt{2 + \sin x}}$$

	Aucune réponse n'est bonne.	
--	------------------------------------	--

3.- En intégrant deux fois par parties, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x) dx$ on a:

$$\text{Posons } u(x) = x^2 \text{ et } v'(x) = \cos(2x), \Rightarrow u'(x) = 2x \text{ et } v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x) dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx \\ &= - \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Posons } f(x) = x \text{ et } g'(x) = \sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 1 \text{ et } g(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x);$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(2x) dx &= - \left(\left[-\frac{1}{2} x \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \right) \\ &= - \left(-\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \cos(\pi) + 0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

	Réponse juste A) $-\pi/4$	
--	---	--

4.- Moment d'inertie.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ox} &= \iint (y^2 + z^2) \sigma_{y,z} dx \cdot dy = \iint y^2 \frac{M}{\pi R^2} dx \cdot dy = \iint r(r \sin \theta)^2 d\theta \cdot dR \frac{M}{\pi R^2} \\ &= \int_0^R r^3 dR \int_0^{2\pi} (\sin \theta)^2 d\theta \frac{M}{\pi R^2} = \frac{1}{4} R^4 \pi \frac{M}{\pi R^2} = \frac{MR^2}{4}. \end{aligned}$$

	Réponse juste A) $\frac{MR^2}{4}$	
--	---	--

5.- Solution de l'équation $\exp(3x - 2) = \exp(2x + 1)$ est

$$e^{3x-2} = e^{2x+1} \Leftrightarrow 3x - 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 3$$

Réponse juste c)3.

6.- Solution générale de $y'' + 4y' + 5y = 0$ (E):

(E) est une équation différentielle d'ordre 2.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + 4r + 5 = 0$ $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 = -4 = (2i)^2$

$$\text{d'où } r_1 = -2 + i \text{ et } r_2 = -2 - i$$

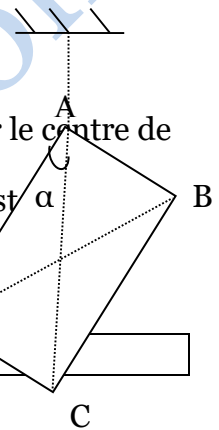
Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = Ae^{-2x} \cos x + Be^{-2x} \sin x$

Réponse juste D). $y = Ae^{-2x} \cos x + Be^{-2x} \sin x$

7.- Angle que fait (AD) avec la verticale.

Lorsque la lame est en équilibre, la droite matérialisée par le fil passe par le centre de gravité de la lame $\Rightarrow$ le fil se tend suivant la droite (AC) $\Rightarrow$ la verticale est

$$\tan \alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{2}{3} = 0.6666$$



Réponse juste D) 33,7°

8.- Dérivée $\frac{dy}{dx}$ ou $y = x^2 + (1+x)^{1+x}$

$$\text{On a } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^2 + (1+x)^{1+x}) = \frac{d}{dx} (x^2 + e^{(1+x) \ln(1+x)})$$

$$= 2x + \left(1 \cdot \ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} \right) e^{(1+x) \ln(1+x)} = 2x + (\ln(1+x) + 1)(1+x)^{1+x}$$

Aucune réponse n'est juste.

9.- Probabilité p

$$p = C_6^2 \left(\frac{1}{4} \right)^4 \left(1 - \frac{1}{4} \right)^{6-4} = \frac{135}{4096}$$

Aucune réponse n'est juste.

10.- Volume.

$$V = \int_1^3 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_1^3 (2x+1)^2 dx = \frac{108}{3} \pi$$

Aucune réponse.

11.- Accélération.

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{OM} = \frac{d^2}{dt^2} ((3t-1)\vec{i} + (2t^2+1)\vec{j}) = 4\vec{j}$$

Réponse juste A).

12 Vitesse.



$$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g \end{vmatrix} \quad \vec{V} = \begin{vmatrix} V_x = V_0 \cos \alpha \\ V_y = gt - V_0 \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x = V_0 t \cos \alpha \\ y = \frac{1}{2} g t^2 - V_0 t \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{Et } y=10\text{m} \Leftrightarrow 5t^2 - 5t = 10 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ car } t \geq 0.$$

$$\text{Et } y = V_y = g \times 2 - 10 \times \frac{1}{2} = 20 - 5 = 15$$

Réponse juste C).

13.- Réponse juste

B) T=mg ;

14.- Résolution de (E)

$$\text{Résolvons d'abord (E')} : \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{x-1}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq \frac{x-1}{x+2} \\ 2 \geq \frac{x-1}{x+2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \\ \frac{x+5}{x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-\infty; -5] \cup [-1; +\infty[\quad \text{D'où } S =]-5; -2[\cup]-2; 1[$$

Aucune solution

15.- Nombre de façon N

$$N = 2C_9^5 = 252$$

Réponse juste D) 252.

Correction proposée par Herman Poka et Herman Defo

PARTIE BQUESTION 1

A/

$$Z_0 = e^{i2\pi/5}; \alpha = Z_0 + Z_0^4 \text{ et } \beta = Z_0^2 + Z_0^3$$

1.- Montrons que $1 + Z_0 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4 = 0$ et en déduisons $\alpha + \beta$

en utilisant les suites géométriques on a :

$$1 + Z_0 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4 = Z_0^0 + Z_0^1 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4 = Z_0^0 \frac{(1-Z_0^{4+1})}{1-Z_0}$$

$$= \frac{1-(e^{i2\pi/5})^5}{1-Z_0} = \frac{1-1}{1-Z_0} = 0; \text{ Donc } \boxed{1 + Z_0 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4 = 0}$$

$$\text{Ainsi, } \alpha + \beta = Z_0 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4 = (1 + Z_0 + Z_0^2 + Z_0^3 + Z_0^4) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\text{Donc } \boxed{\alpha + \beta = -1}$$

2.- Dédouons-en que α et β sont les racines du polynôme $x^2 + x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \alpha \cdot \beta &= (Z_0^1 + Z_0^4)(Z_0^2 + Z_0^3) = Z_0^3 + Z_0^4 + Z_0^6 + Z_0^7 \\ &= Z_0^3 + Z_0^4 + Z_0^1 \times Z_0^5 + Z_0^2 \times Z_0^5 \text{ or } Z_0^5 = 1 = \alpha + \beta = -1. \end{aligned}$$

Comme $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha \cdot \beta = -1$ α et β sont les racines du polynôme $x^2 + x + 1$.

3.- Déterminons α en fonction de $2\pi/5$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \alpha &= Z_0 + Z_0^4 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right) + \left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) \alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \dots \end{aligned}$$

4.-Dédouction de α

$$\alpha \text{ est solution de } x^2 - x + 1 = 0; \Delta = 5 \Rightarrow \text{deux solutions } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Or d'après 3.- } \alpha = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0 \text{ car } \frac{2\pi}{5} \in]0; 2\pi[$$

$$\text{Donc } \alpha \text{ est la solution positive: } \boxed{\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

B/

1-a) Détermination de C .

Soit $M(z = x + iy) \in P(x, y \in \mathbb{R})$.

$$M \in C \Leftrightarrow 5z\bar{z} + (z + \bar{z} + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 5(x^2 + y^2) + (2x + 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

1-b) Indiquons les foyers F et F' .

$$\text{Posons } c = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2} = 4/3\sqrt{5}$$

Les foyers sont les points $\square$;

$$2) \mathcal{F} = H(0; 2) \circ R\left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{Donnons l'équation de } C';$$

Soit $M'(Z' = x' + iy')$; $x', y' \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}(M) = M'$

$$\mathcal{F}(M) = M' \Leftrightarrow z' = 2e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot z \Leftrightarrow x' + iy' = 2i(x + iy) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y' \text{ et } y = -\frac{1}{2}x'$$

$$\text{Ainsi (c') a pour équation : } \frac{\left(\frac{1}{2}y' + \frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}x'\right)^2}{\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x'^2}{\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{(y' - \frac{4}{5})^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1}$$

3.-Montrons que $F_1 = \mathcal{F}(F)$ et $F'_1 = \mathcal{F}(F')$.

Posons $c' = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)^2} = 8/(3\sqrt{5})$.

Les foyers de c' sont : $F_1 \left(0; -\frac{4}{9} + \frac{8}{3\sqrt{5}}\right)$ et $F'_1 \left(0; -\frac{4}{9} - \frac{8}{3\sqrt{5}}\right)$.

$$\text{Or } \begin{cases} 0 = -2 \times 0 \\ -\frac{4}{9} + \frac{8}{3\sqrt{5}} = 2 \left(-\frac{2}{9} + \frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 0 = -2 \times 0 \\ -\frac{4}{9} - \frac{8}{3\sqrt{5}} = 2 \left(-\frac{2}{9} - \frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \end{cases}.$$

Donc $\boxed{F_1 = \mathcal{F}(F) \text{ et } F'_1 = \mathcal{F}(F')}.$

Question 2

A/

$$t = 0,1990; \frac{dp}{dt} = kp; \quad k = 0,02 \ln 2 \approx 0,01386; \quad \text{En } 1950, p(t_1) = 15.10^6.$$

1.- *Expression générale.*

$$\text{Sachant que } \frac{dp}{dt} = kp \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = k dt \Leftrightarrow \quad \square$$

2.- *Population en 1900 et 1950.*

$$\text{On a : en } 1900, t=0 \text{ d'où } p(0)=A \quad p(t_1) = 15.10^6 \Leftrightarrow A = \frac{15.10^6}{e^{kt_1}}$$

Application Numérique : $A = 7,5.10^6$ habitants en 1900.

$$\text{En } 1980, p(80) = Ae^{80k} = 22,735.10^6 \text{ habitants.}$$

$$\text{B/} \quad \text{.-(E): } 4y'' + 4y' + y = x + 6.$$

1.- *Déterminons g.*

les fonctions g sont de la forme $g: x \mapsto ax + b$ ou $a, b \in \mathbb{R}$.

$$g \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow 4(ax + b)'' + 4(ax + b)' + ax + b = x + 6 \Leftrightarrow 4a + ax + b = x + 6 \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 2: \text{ donc } \boxed{g: x \mapsto x + 2 \text{ est solution de (E)}}.$$

$$\text{2.-(E}_1\text{): } 4y'' + 4y' + y = 0.$$

2.-a) Montrons que f solution de (E) $\Rightarrow h = f - g$ est solution de (E₁).

$$\begin{aligned} \text{On a } 4h'' + 4h' + h &= 4(f - g)'' + 4(f - g)' + (f - g) \\ &= 4f'' + 4f' + f - (4g'' + 4g' + g) = (x + 6) - (x + 6) \\ &= 0 \text{ car } f \text{ est solution de (E).} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{f \text{ solution de (E)} \Rightarrow h = f - g \text{ est solution de (E}_1\text{)}}.$$

2.-b) Montrons que h solution de (E₁) $\Rightarrow f = g + h$ est solution de (E).

$$\text{On a } 4f'' + 4f' + f = 4(g + h)'' + 4(g + h)' + g + h = 4g'' + 4g' + g + 4h'' + 4h' + h$$

$$= x + 6 + 0 = x + 6.$$

Donc h solution de $(E_1) \Rightarrow f = g + h$ est solution de (E) .

3.-Résolution de (E_1) .

L'équation caractéristique de (E_1) est $4r^2 + 4r + 1 = 0$; $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 = 0$

$$\text{donc } r = r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}.$$

les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme $f: x \mapsto (Ax + B)e^{(-\frac{1}{2})x}$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $m: x \mapsto (Ax + B)e^{(-\frac{1}{2})x} + x + 6$

4.-fonction f solution de (E) tel que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$.

On a $f(0) = 4 \Leftrightarrow B = -2$ et $f'(0) = 1 \Leftrightarrow A - \frac{1}{2}B + 1 = 1 \Leftrightarrow A = -1$.

Donc $f: x \mapsto -(x + 2)e^{(-\frac{1}{2})x} + x + 6$.

QUESTION 3

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

1.- Calcul de I_0 et J_0

$$\text{On a : } I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-0x} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-0x} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2.

2.a) Montrons que
$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$$

Pour I_n posons: $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = e^{-nx} \rightsquigarrow u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = -ne^{-nx}$

Une intégration par partie donne : $I_n = [-\cos x \cdot e^{-nx}]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ne^{-nx} \cos x \, dx = 1 - nJ_n$

Donc $I_n + nJ_n = 1$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

Posons $u(x) = e^{-nx}$ et $v'(x) = \cos x$; on obtient $u'(x) = -ne^{-nx}$ et $v(x) = \sin x$.

Une intégration par partie donne : $J_n = [e^{-nx} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ne^{-nx} \sin x \, dx = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$

Donc $\boxed{-nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}}$

2.b) Dédution de I_n et J_n .

On a $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}} \text{ et } \boxed{J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}}$

3.- Limites.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0.}$$

QUESTION 4.

$ABCD$ carré de centre O . $EA = EB = EC = ED = 2a$ et $OA = a$.

1.- Montrons que $(EO) \perp (ABC)$.

On a : $EB = EC$ et $OB = OC$ donc (EO) appartient au plan médiateur de $[BC]$ et $(EO) \perp (BC)$.

On a : $EA = EB$ et $OA = OB$ donc (EO) appartient au plan médiateur de $[AB]$ et $(EO) \perp (AB)$.

De plus $(AB) \in (ABC)$, $(BC) \in (ABC)$ et $(AB) \cap (BC) = B$

Donc $\boxed{(EO) \perp (ABC)}$.

2. déterminons $E = \{M \in \xi \text{ tel que } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = ka^2\}$

$$M \in \xi \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = ka^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = ka^2$$

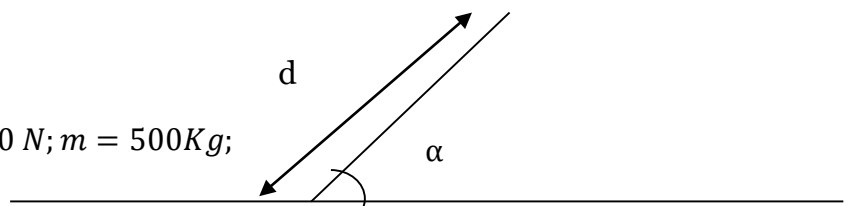
$$\Leftrightarrow 4MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = ka^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{k-4}{4}a^2$$

Ainsi, $\begin{cases} \text{si } k < 4 \text{ alors } E = \{ \} \\ \text{si } k = 4 \text{ alors } E = \{O\} \\ \text{si } k > 4 \text{ alors } E = C\left(O; \frac{a}{2}\sqrt{k-4}\right) \end{cases}$

B/

$$d = 100m; \sin \alpha = \frac{20}{100}; f = 340 \text{ N}; m = 500 \text{ Kg};$$



1.-Vitesse finale du car V_f

D'après le Théo de l'énergie cinétique, $\frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2 = \vec{p} \cdot \vec{d} + \vec{f} \cdot \vec{d} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_f^2 = mgd\sin\alpha - fd$.

$$\Leftrightarrow V_f = \sqrt{\frac{2 \times d}{m}(mg\sin\alpha - f)}$$

Application Numérique : $V_f = 16.24 \text{ m.s}^{-1}$

2.-Force de freinage F .

$$\text{On a : } -\frac{1}{2}mV_f^2 = -Fh \Leftrightarrow F = \frac{m}{h}V_f^2$$

$$AN: F = \frac{500 \times 264}{10} = 13200 \text{ N}$$

QUESTION 5

$$f:]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto x^2 \ln(1+x) - x$$

1.-Montrons que f est dérivable et calculons f .

f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $]-1; +\infty[$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x} - 1.$$

2.a) Déterminons f'' de f .

f' est dérivable sur $]-1; +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $]-1; +\infty[$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, f''(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{2x}{1+x} + \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

Montrons que f' est croissante.

$$\forall x \in [0; +\infty[, x \geq 0 \text{ et } 1+x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0 \text{ et } \ln(1+x) \geq 0$$

Et par suite, $f''(x) \geq 0$. Donc f' est croissante sur $\forall x \in [0; +\infty[$,

2. b Montrons que $f'(0) = 0$ admet une solution unique sur $[0; +\infty[$,

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x} - 1 \right) = -1. \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

La fonction f' étant continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ établit une bijection de $[0; +\infty[$ vers $f([0; +\infty[) = [-1; +\infty[$

correction proposée par Herman Poke et Herman Défo; Mise en page Kengne.

or $0 \in [-1; +\infty[$ donc $\exists$ 1 unique $\beta \in [0; +\infty[$ tel que $f'(\beta) = 0$.

donc $\exists$ 1 unique $x = \beta \in [0; +\infty[$ tel que $f'(x) = 0$.

$$3.- \quad g:]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}; \quad u \mapsto 2\ln u + 1 - \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}$$

3.a) calcul de g' et montrons que g est strictement croissante sur $]0; 1[$.

g est dérivable sur $]0; 1[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0; 1[$ et $\forall u \in]0; 1[, \text{ on a: } g'(x) = \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} + 1/(u-1)^2 >$

0. Donc g est strictement croissante sur $]0; 1[$.

Correction proposée par Herman Poka et Herman Défo et mise en page par Kengne.

3.b) Calcul des limites en 0 et en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\ln u + 1 - \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty.$$

Déduisons que g s'annule en un unique point de $]0; 1[$

G étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection croissante de $]0; 1[$ vers $g(]0; 1[) =]-\infty; +\infty[$ or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc 0 admet un unique antécédent dans $]0; 1[$ par g .

3.c) Montrons que $\forall u \in]0; 1[, \text{ on a: } f'(u-1) = (u-1)g(u)$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } \forall u \in]0; 1[, (u-1) \in]-1; 0[\text{ et } (u-1)g(u) &= (u-1) \left(2\ln u + 1 - \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} \right) \\ &= 2(u-1)\ln u + u + \frac{1}{u} - 3. \end{aligned}$$

$$\text{Et } f'(u-1) = 2(u-1)\ln u + \frac{(u-1)^2}{u} - 1 = 2(u-1)\ln u + u + \frac{1}{u} - 3.$$

Donc $\forall u \in]0; 1[, \text{ on a: } f'(u-1) = (u-1)g(u)$.

3.d) déduisons que $f'(x) = 0$ admet une unique racine sur $] -1; 0[$.

Sachant que $\exists! v \in]0; 1[$ tel que $g(v) = 0$;

d'après 3.c), $f'(v-1) = 0$. Or $v \in]0; 1[\Rightarrow v-1 \in]-1; 0[$.

Posons $\alpha = v-1$. $\exists$ donc un unique $\alpha \in]-1; 0[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

3.e) Calcul de $f'(0)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$ et déduisons les signes de f' .

$$\text{On a: } f'(0) = 2 \times 0 \times \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} - 1 \Rightarrow f'(0) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x} - 1 \right) = +\infty.$$

Signe de f' :

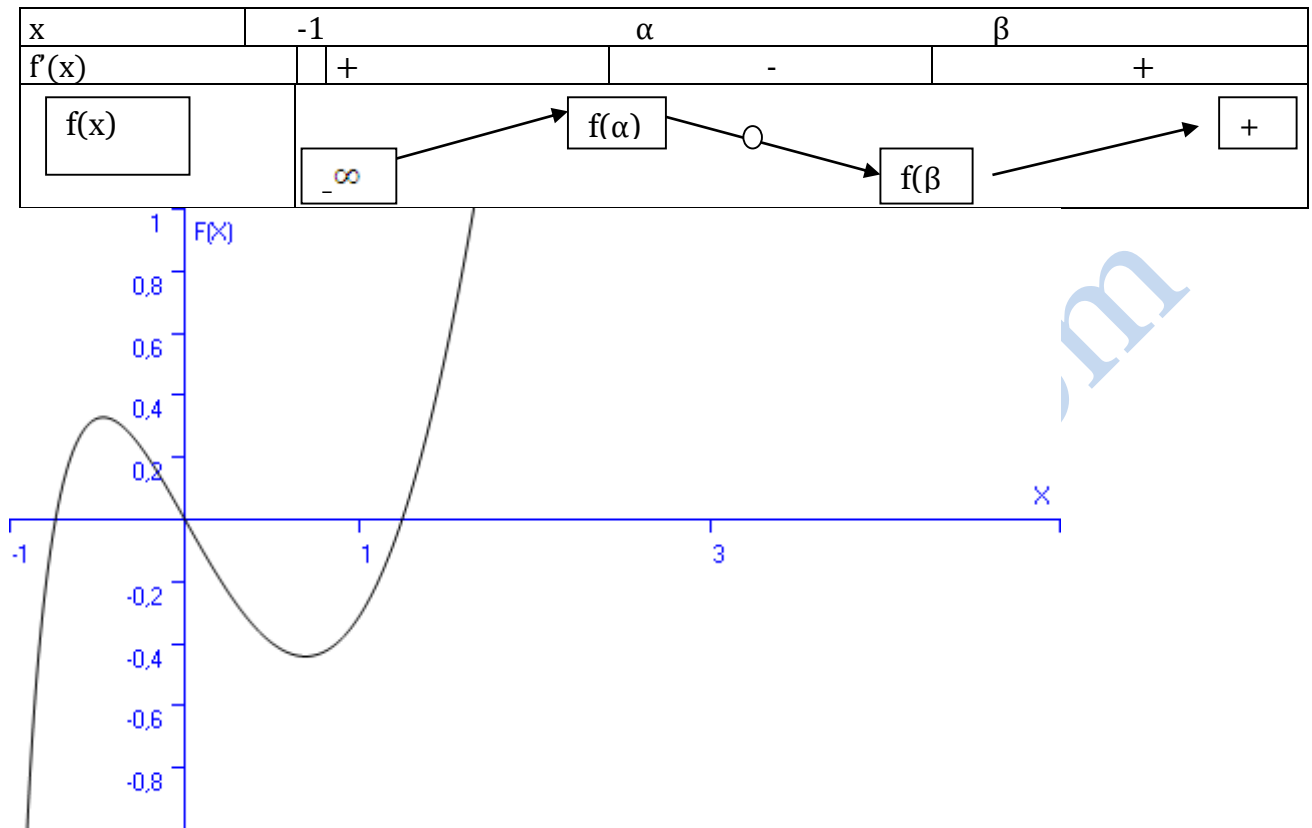
x	-1	α	β
$f'(x)$	+	-	+

4.- Calcul des limites :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 \ln(1+x) - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln(1+x) - x) = +\infty$$

Tableau de variation:



QUESTION 6

1.a) Réduction de l'ensemble des trois forces en $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$$\text{On a: } \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) + (4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}) + (-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$\text{Donc } \vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

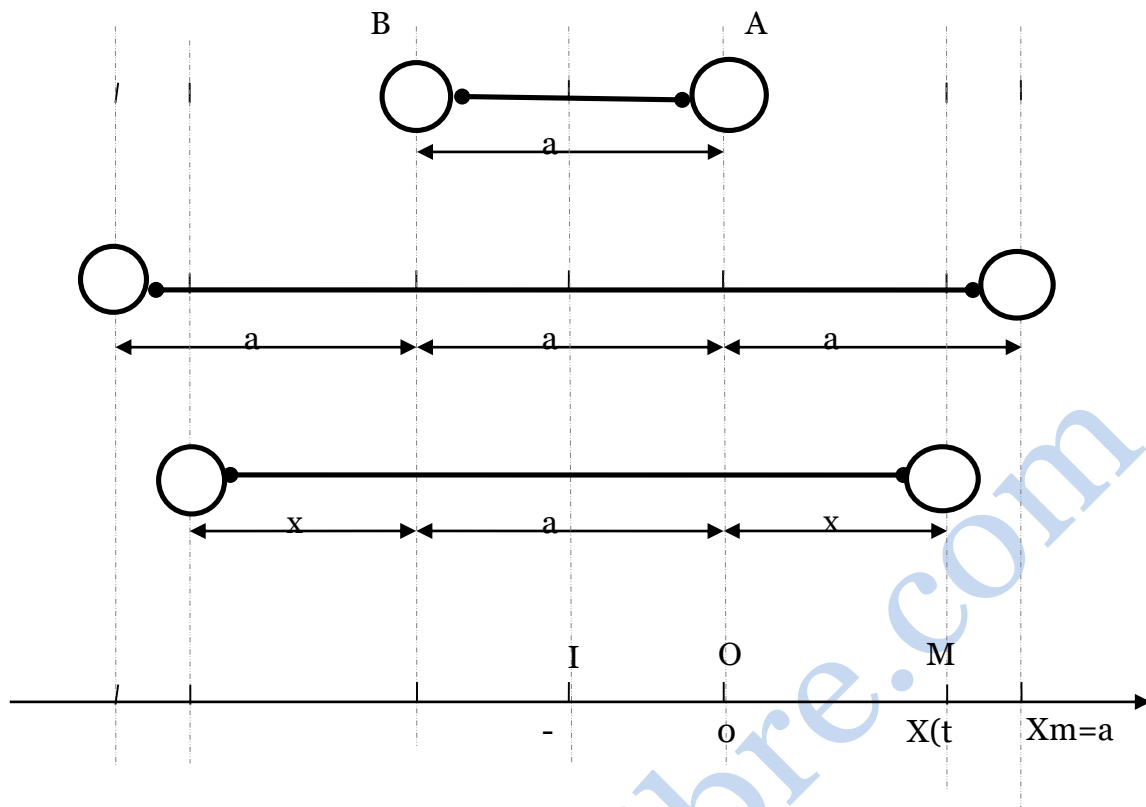
$$\text{Le point G est tel que } \vec{AG} = \vec{F} \Rightarrow \vec{AO} + \vec{OG} = \vec{F} \Rightarrow \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{F}$$

$$\text{Donc } \vec{OG} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

1.b) Equation de la droite vectorielle portante de $\vec{F}$

$$\text{posons } M(x, y, z); M \in \text{à cette droite} \Leftrightarrow \vec{AM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x - 3z = 2 \\ 5y - 2z = 3 \end{cases} \text{ Donc l'équation est } \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 5x - 3z = 2 \end{cases}$$



Il faut remarquer que le fil est élastique ; cependant la différence avec un ressort est que une fois qu'il atteint une longueur $l < a$, il ne réagit plus comme un ressort et par conséquent, il n'exerce plus de force sur les deux boules. Correction proposé par Herman défo et Herman poka et mise en page par kengne. On doit donc étudier le système pour $l > a$ et pour $l < a$. nous nous intéresserons uniquement à la boule A et nous prendrons pour origine du mouvement le point O au repos et à $t=0s$, $x(0)=0$.

Cas ou $l > a$:

Etudions le mouvement de la boule A lorsqu'elle est dans une position $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$

$$\text{La RFD : } \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{T} = m\vec{\gamma} \Rightarrow -k((a + 2x) - a)\vec{i} = m\vec{\gamma} \Rightarrow -mg \cdot 2 \cdot x\vec{i} = m\vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2gx = 0 \Rightarrow \text{équation différentielle dont la solution est de la forme}$$

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\sqrt{2g} \cdot t + \varphi) \text{ or à } t = 0, x = 0 \Rightarrow 0 = a \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = a \cdot \sin(\sqrt{2g} \cdot t) \Rightarrow \dot{x} = a\sqrt{2g} \cos(\sqrt{2g} \cdot t)$$

$$\text{On a : } x = a \Rightarrow \sin(\sqrt{2g} \cdot t) = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}}$$

Cas ou $l < a$:

Le mouvement devient uniforme avec une vitesse $\dot{x} = \dot{x}(t = 0) = a\sqrt{2g} \Rightarrow x(t) = \sqrt{2g} \cdot a \cdot t$

$$x(t) = \frac{a}{2} \Rightarrow \sqrt{2g} \cdot at = \frac{a}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}}$$

Ainsi, $t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2g}}$

Question 7

1. On choisit au hasard un tir.

Soit A : l'événement «une cible mobile est atteinte».

1.a) B : «3 cibles sont atteintes.»

Nous avons affaire à une expérience de Bernoulli où le nombre d'épreuves est 6
le la probabilité d'un succès est $p=P(A)=1/3$.

$$P(B) = C_6^3(p)^3(1-p)^{6-3} = 0.219$$

1.b) C : «Au moins deux cibles sont atteintes» = «Au plus 4cibles atteintes».

$$\text{De même, } P(C) = 1 - [C_6^5(p)^5(1-p)^{6-5} + C_6^6(p)^6(1-p)^{6-6}] = 0.982$$

2. Une variable aléatoire X à valeur dans R suit une loi de poisson de

paramètre λ ($\lambda > 0$) si la probabilité $P[X = k]$ est donnée par $P[X = k]$

$$= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

en ce moment on dmontre que l'espérance ou
moyenne de cette variable aléatoire est donnée par $E(X) = \lambda$.

d ans l'exercice, on donne $E(X) = 4 = \lambda$.

2. a) $P[X = 2] = \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 0.147$

2.b) $P[1 \leq X < 4] = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} + \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = 0.415.$

3. Une variable aléatoire continue suit une loi Normale de paramètres $(\mu; \sigma)$

Si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f: R \rightarrow R$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \text{ avec } \mu, \sigma \in R \text{ et } \sigma > 0.$$

On note $X \sim N(\mu; \sigma)$

On démontre que l'espérance est donnée par $E(X) = \mu$ et la Variance par $V(X) = \sigma^2$.

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ en posant $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ alors Z suivra la loi $Z \sim N(0,1)$.

La densité de probabilité de Z est donc $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

La fonction de répartition de z est $\pi: R \rightarrow R$

$$t \mapsto \pi(t) = P[X < t] = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

3. a) $k = ?$ sachant que $P[Y > k] = 0.25$.

$$P[Y > K] = P\left[Z > \frac{k - \mu}{\sigma}\right] = 1 - P\left[Z < \frac{k - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \pi(t); \text{ on en déduit } k.$$

3.b) calcul de m sachant que $P[7 - m < Y < 7 + m]$

La résolution de ces questions nécessite un tableau de valeur de la fonction π !!!

Voir dans le doc mise à jour

www.etudelibre.com